

เอกสารประกอบการเรียนรู้
วิชา คณิตศาสตร์

เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

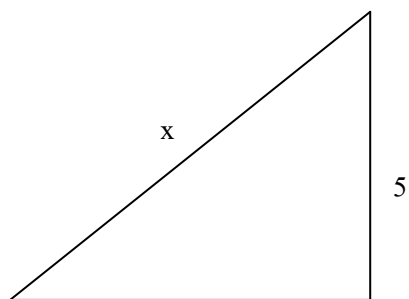
จัดทำโดย
ครูทศพร ชัยชนะ

โรงเรียนมาบตาพุดพันพิทยาคาร
ต.เนินพระ อ.เมือง จ.ระยอง 21150

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

1. กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและความยาวของด้าน ให้นักเรียนหาค่าของ x

(1)



12

5

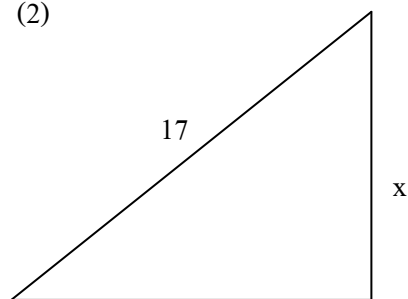
.....

.....

.....

.....

(2)



15

x

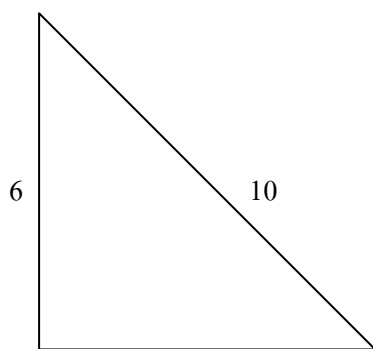
.....

.....

.....

.....

(3)



6

10

x

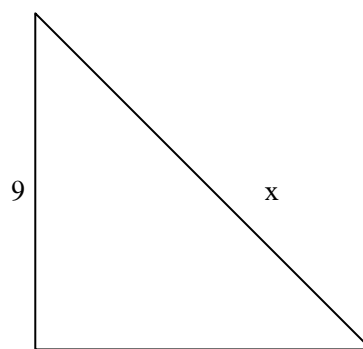
.....

.....

.....

.....

(4)



9

x

40

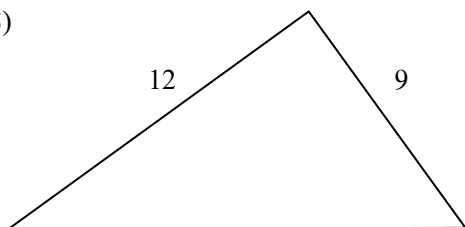
.....

.....

.....

.....

(5)



12

9

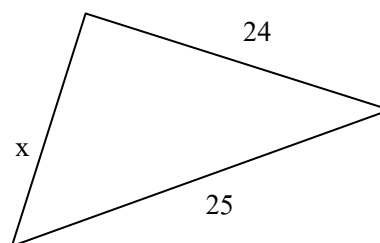
x

.....

.....

.....

(6)



24

25

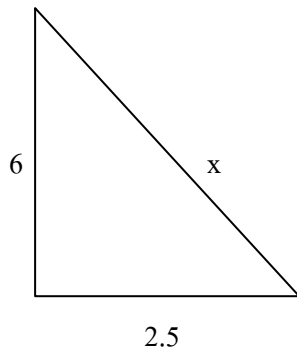
x

.....

.....

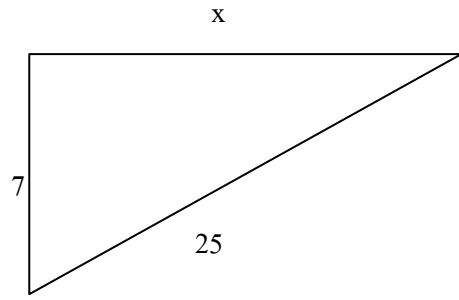
.....

(7)



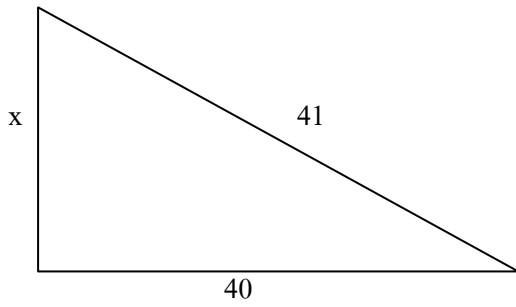
.....
.....
.....
.....

(8)



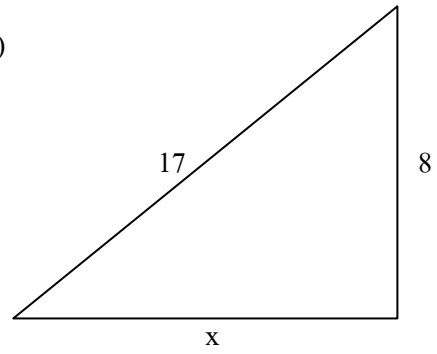
.....
.....
.....
.....

(9)



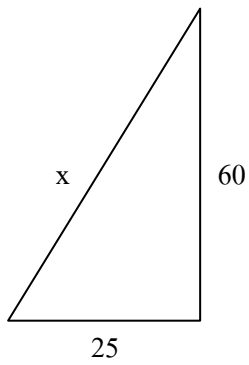
.....
.....
.....
.....

(10)



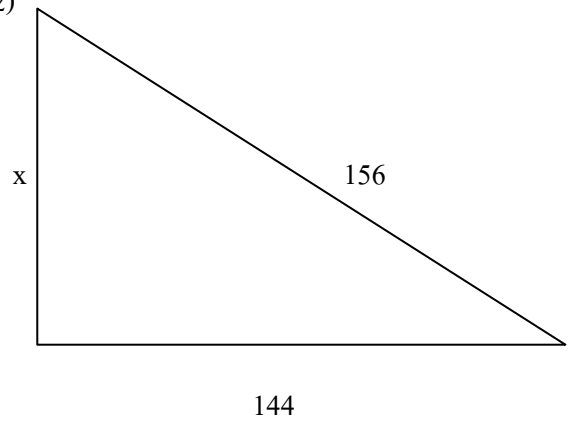
.....
.....
.....
.....

(11)



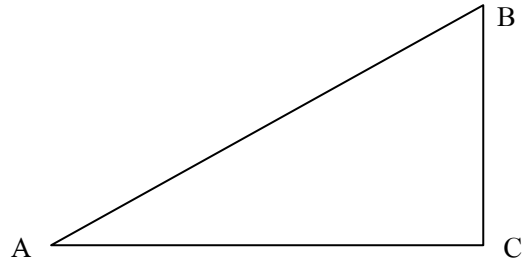
.....
.....
.....

(12)



.....
.....
.....

2. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จาก $\hat{A}CB = 90^\circ$ และความยาวของด้านต่างๆ จงหาความยาวของด้านที่เหลือ



(1) $AC = 6, BC = 8$

.....

(2) $AC = 5, BC = 12$

.....

(3) $BC = 9, AB = 41$

.....

(4) $AB = 73, AC = 55$

.....

(5) $AC = 4.8, BC = 2$

.....

(6) $AC = 45, BC = 28$

.....

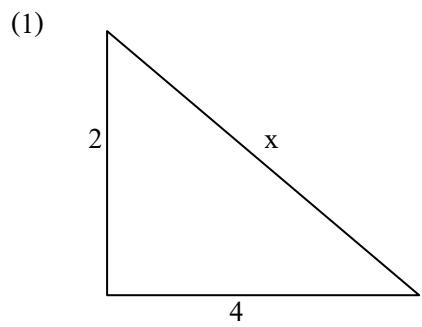
(7) $AB = 2.9, AC = 2.1$

.....

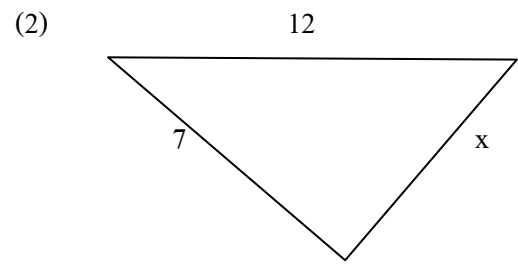
(8) $AC = 2.4, BC = 0.7$

.....

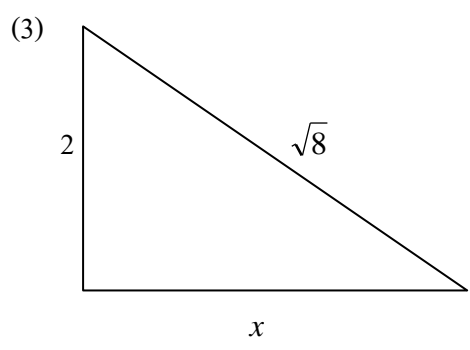
3. กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและความยาวของด้านสองด้าน ให้หาความยาวของด้านที่เหลือ



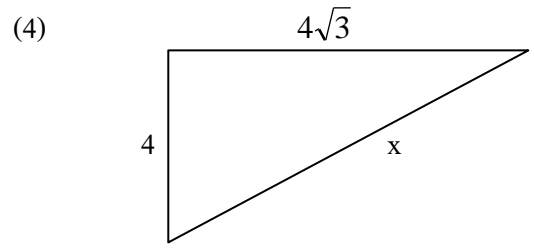
$$\begin{aligned}
 x^2 &= 4^2 + 2^2 \\
 &= 16 + 4 \\
 &= 20 \\
 &= 4 \times 5 \\
 x &= 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$



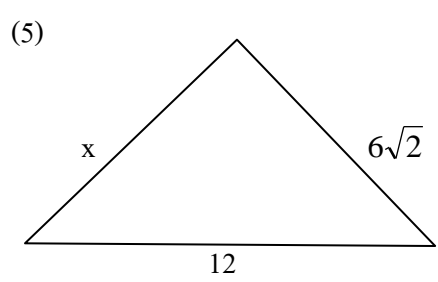
.....



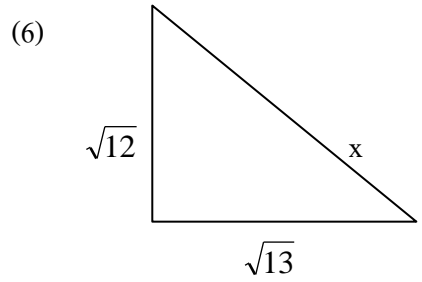
.....



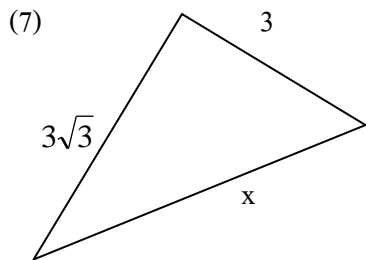
.....



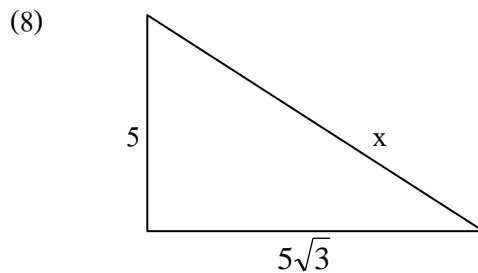
.....



.....

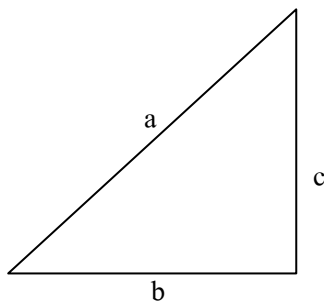


.....



.....

4. กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและความยาวของด้านทั้งสามคือ a , b และ c แต่ละข้อกำหนดความยาวของด้านให้สองด้าน จงหาความยาวของด้านที่เหลือ



(1) $a = \sqrt{5}$, $b = 2$

.....

(2) $b = \sqrt{5}$, $c = 2$

.....

(3) $a = \sqrt{20}$, $c = 2$

.....

(4) $b = \sqrt{24}$, $c = \sqrt{25}$

.....

(5) $a = \sqrt{101}$, $b = 1$

.....

(6) $b = \sqrt{89}$, $c = \sqrt{55}$

.....

5. จงหาจุดบนเส้นจำนวนที่แทน $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ และ $\sqrt{8}$

จุด A แทน

จุด B แทน

จุด C แทน

7. จาก $(n^2 + 1)^2 = (2n)^2 + (n^2 - 1)^2$ ถ้าให้ n เป็นจำนวนเต็มที่ยังมากกว่า 1 แล้ว $2n$, $n^2 - 1$ และ $n^2 + 1$ เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส ให้นักเรียนเติมตัวเลขลงในให้สมบูรณ์

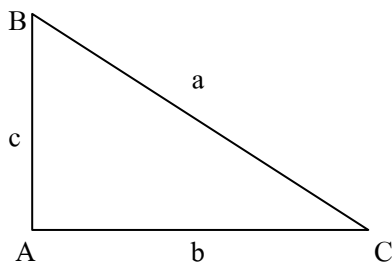
n	$2n$	$n^2 - 1$	$n^2 + 1$	ผลที่ได้
2	4	$2^2 - 1 = 3$	$2^2 + 1 = 5$	$5^2 = 3^2 + 4^2$
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

8. จาก $(m^2 + n^2)^2 = (2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2$ ถ้าให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ ที่ $m > n$ แล้ว $2mn$, $m^2 - n^2$ และ $m^2 + n^2$ เป็นจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส ให้นักเรียนเติมตัวเลขลงในตารางให้สมบูรณ์

m	n	$2mn$	$m^2 - n^2$	$m^2 + n^2$	ผลที่ได้
2	1	4	$2^2 - 1^2 = 3$	$2^2 + 1^2 = 5$	$5^2 = 4^2 + 3^2$
3					
3					
4					
4					
4					
5					
5					

บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม มีด้านทั้งสามยาว a, b และ c หน่วย และ $a^2 = b^2 + c^2$ แล้วรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว a หน่วย



จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ และ $a^2 = b^2 + c^2$ จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีมุม BAC เป็นมุมฉาก

1. กำหนดความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม ให้นักเรียนหาว่าความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมในแต่ละข้อเป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

(1) 12, 35, 37

(2) 14, 48, 50

$$12^2 + 35^2 = 144 + 1,225$$

.....

$$= 1,369$$

.....

$$37^2 = 1,369$$

.....

$$12^2 + 35^2 = 37^2$$

.....

ดังนั้น 12, 35, 37 เป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 37 หน่วย

.....

(3) 16, 63, 65

(4) 18, 81, 82

.....

.....

(5) 20, 99, 101

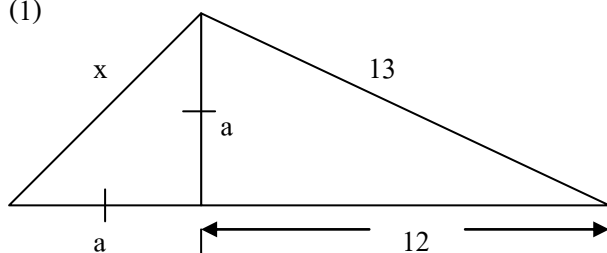
(6) 30, 224, 227

.....

.....

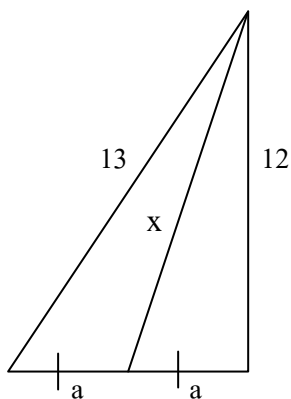
2. จากรูปที่กำหนด จงหาค่าของ x ในแต่ละข้อ

(1)



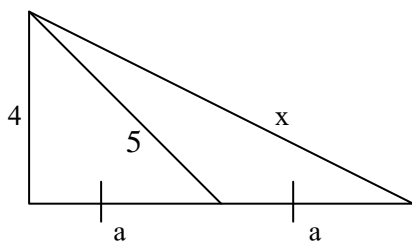
.....

(2)

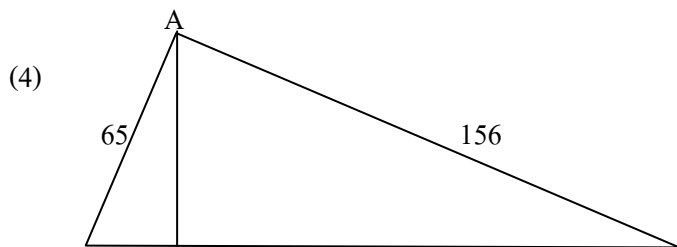


.....

(3)

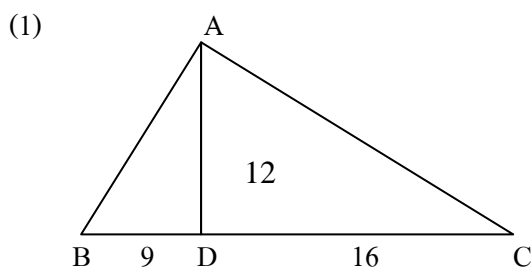


.....



.....

3. ให้นักเรียนแสดงว่า รูปสามเหลี่ยม ABC ในแต่ละข้อเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

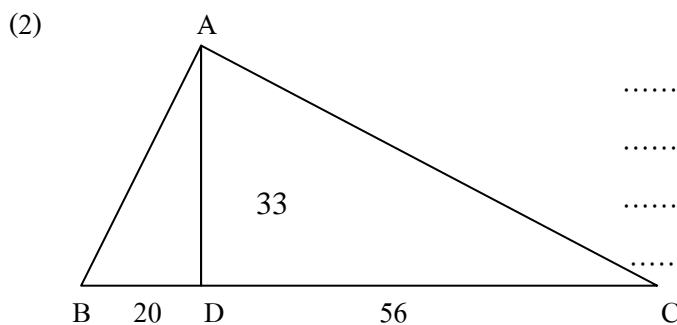


$$\begin{aligned}
 AB^2 &= 9^2 + 12^2 \\
 &= 81 + 144 \\
 &= 225 \\
 AC^2 &= 12^2 + 16^2 \\
 &= 144 + 256 \\
 &= 400 \\
 BC^2 &= (9 + 16)^2 \\
 &= 625
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AB^2 + AC^2 &= 225 + 400 \\
 &= 625
 \end{aligned}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

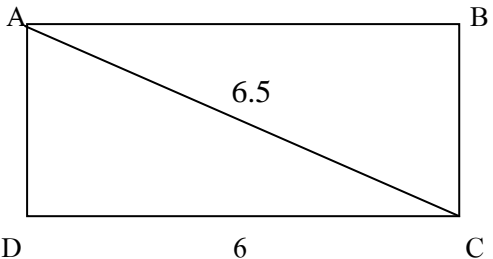
ดังนั้นรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

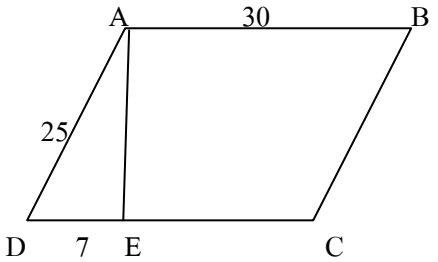


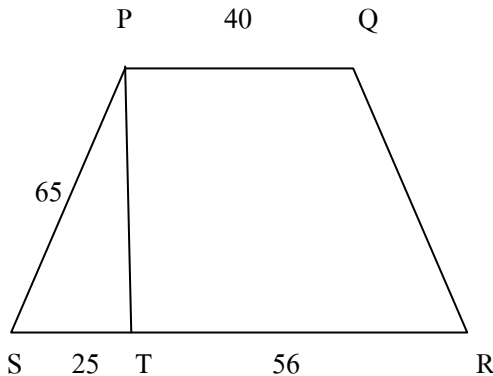
.....

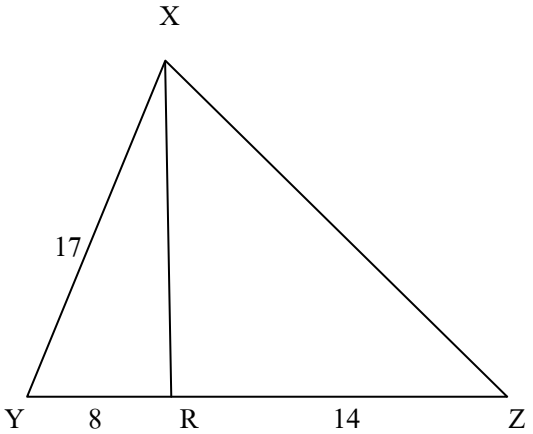
.....

4. ให้นักเรียนหาพื้นที่ของรูปต่อไปนี้ (มีหน่วยเป็นหน่วยความยาว)

(1) 

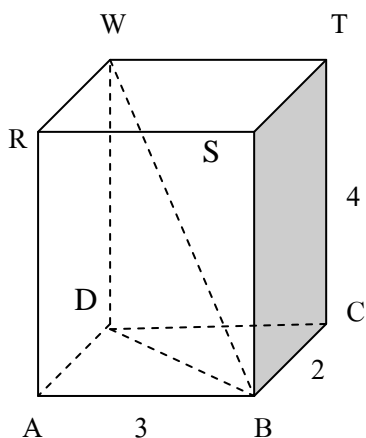
(2) 

(3) 

(4) 

การนำไปใช้

1. จากรูป จงหาความยาวของ \overline{BW}



(1) \overline{CD} ยาวหน่วย

(2) \overline{DW} ยาวหน่วย

(3) $BD^2 = BC^2 + CD^2$

$= 2^2 + 3^2$

$= 13$

เพราะฉะนั้น $BD = \dots\dots\dots$ หน่วย

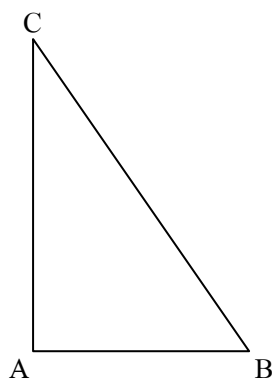
(4) $BW^2 = BD^2 + DW^2$

$= (\sqrt{13})^2 + 4^2$

$= 29$

เพราะฉะนั้น $BW = \dots\dots\dots$ หน่วย

2. ศตวรรษสังเกตเห็นว่าวอยู่เหนือศีรษะพอดี เขายังยืนห่างจากผู้เล่นว่าว 30 เมตร ถ้าสายป่านยาว 50 เมตร ว่าวอยู่เหนือศีรษะของศตวรรษกี่เมตร



ให้ศตวรรษยืนที่ A

C เป็นตำแหน่งที่ว่าวอยู่ตรงศีรษะของศตวรรษ

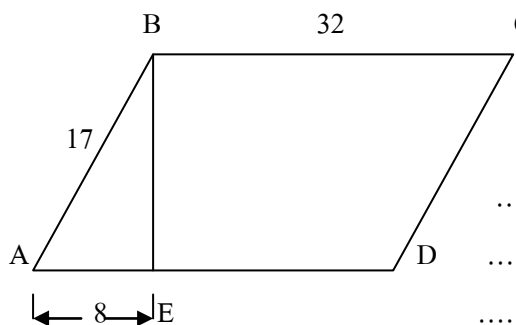
B เป็นตำแหน่งผู้เล่นว่าวอยู่ห่างจาก C 50 เมตร

$\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$AC^2 = BC^2 - AB^2$

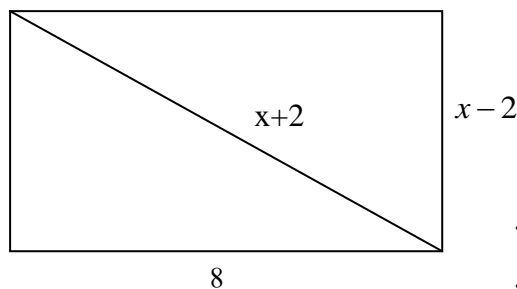
-
-
-
-
-

3. จงหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD



-
-
-
-
-

4. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งมีด้านกว้าง $x-2$ หน่วย ด้านยาว 8 หน่วย เส้นทแยงมุมยาว $x+2$ หน่วย จงหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมรูปนี้

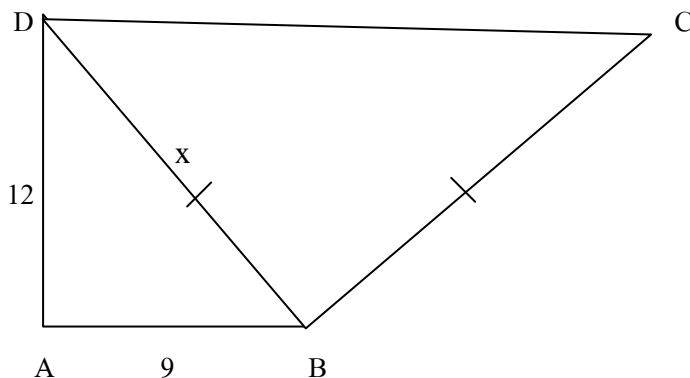


โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$(x+2)^2 = (x-2)^2 + 8^2$$

.....

5. จงหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม ABCD



พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม ABCD = พื้นที่ $\triangle ABD$ + พื้นที่ $\triangle BCD$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 9 \times 12\right) + \left(\frac{1}{2} \times x \times x\right)$$

หา x : $x^2 = 9^2 + 12^2$

=

=

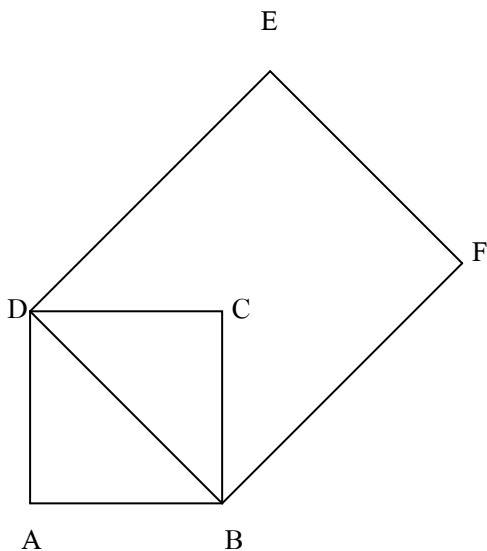
$x = \dots\dots\dots$

ดังนั้น พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม ABCD = $\left(\frac{1}{2} \times 9 \times 12\right) + \left(\frac{1}{2} \times \dots \times \dots\right)$

=

=ตารางเซนติเมตร

6. กำหนดให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส มี \overline{BD} เป็นเส้นทแยงมุม $BDEF$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนเส้นทแยงมุม BD
 ต้องพิสูจน์ว่า $BD^2 = 2AB^2$

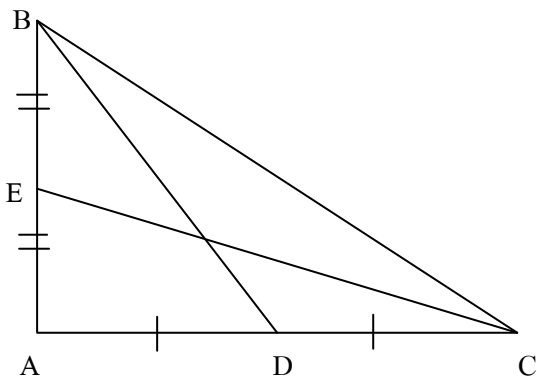


พิสูจน์ (ให้นักเรียนเติมเหตุผลลงในช่องว่าง)

- 1) $BD^2 = AB^2 + AD^2$ (.....)
- 2) แต่ $AB = AD$ (.....)
- 3) $BD^2 = AB^2 + AB^2$ (.....)
- 4) $BD^2 = 2AB^2$ (.....)

7. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีมุม BAC เป็นมุมฉาก \overline{BD} และ \overline{CE} เป็นเส้นมัธยฐาน (แบ่งครึ่งฐาน)

ต้องพิสูจน์ว่า $BD^2 + CE^2 = \frac{5}{4}BC^2$



พิสูจน์ (ให้นักเรียนเติมเหตุผลลงในช่องว่าง)

1) $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (.....)

2) $AB^2 = BD^2 - AD^2$ (.....)

3) แต่ $AD = \frac{AC}{2}$ (.....)

4) $AB^2 = BD^2 - \frac{AC^2}{4}$ (.....)

5) $AC^2 = CE^2 - AE^2$ (.....)

6) แต่ $AE = \frac{AB}{2}$ (.....)

7) $AC^2 = CE^2 - \frac{AB^2}{4}$ (.....)

8) $BC^2 = \left(BD^2 - \frac{AC^2}{4} \right) + \left(CE^2 - \frac{AB^2}{4} \right)$ (.....)

9) $BC^2 = (BD^2 - CE^2) - \left(\frac{AC^2}{4} + \frac{AB^2}{4} \right)$ (.....)

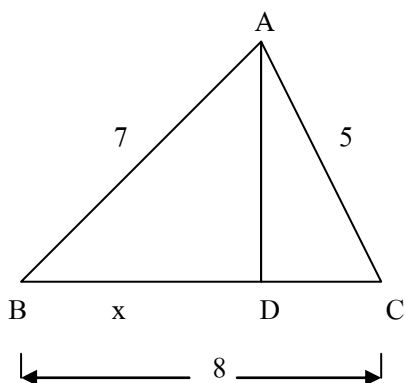
10) $BC^2 = (BD^2 + CE^2) - \left(\frac{AC^2 + AB^2}{4} \right)$ (.....)

11) $BC^2 = BD^2 + CE^2 - \frac{BC^2}{4}$ (.....)

12) $BD^2 + \frac{BC^2}{4} = BD^2 + CE^2$ (.....)

13) $\frac{5}{4} BC^2 = BD^2 + CE^2$ (.....)

8. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC มี $AB = 7$ เซนติเมตร $AC = 5$ เซนติเมตร $BC = 8$ เซนติเมตร \overline{AD} ตั้งฉากกับ \overline{BC} ที่จุด D จงหาความยาวของ \overline{BD}



วิธีทำ ให้ \overline{BD} ยาวเซนติเมตร

จะได้ \overline{CD} ยาว.....เซนติเมตร

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABD; $AD^2 = \dots\dots\dots(1)$

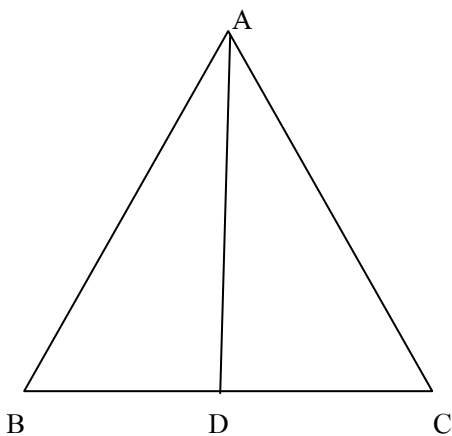
รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACD; $AD^2 = \dots\dots\dots(2)$

$(1) = (2);$

.....

9. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า มี \overline{AD} ตั้งฉากกับ \overline{BC} ที่จุด D จง

พิสูจน์ว่า $AD^2 = \frac{3}{4} AB^2$



รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABD;

1) $AD^2 = AB^2 - BD^2$ (.....)

2) $BD = \frac{BC}{2}$ (.....)

3) (แทนค่า BD ในข้อ 1)

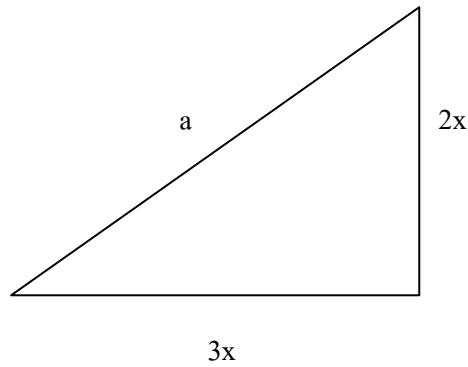
4) (.....)

5) (.....)

6) (.....)

7) (.....)

10. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีพื้นที่ 24 ตารางเซนติเมตร อัตราส่วนของความยาวของด้านประกอบมุมฉากเท่ากับ 2:3 จงหาความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก



วิธีทำ ให้ด้านประกอบมุมฉาก 2 ด้าน ยาว 2x และ 3x เซนติเมตร

$$\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม} = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

.....

ให้ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว a เซนติเมตร

จะได้

.....

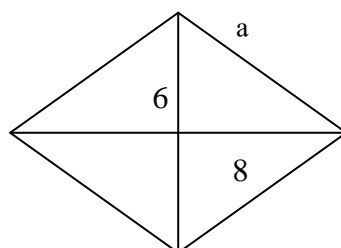
.....

.....

.....

.....

11. รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนรูปหนึ่งมีพื้นที่ 96 ตารางเซนติเมตร และมีอัตราส่วนความยาวของเส้นทแยงมุมเท่ากับ 3:4 จงหาความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนรูปนี้



ให้เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนยาว $3x$ และ $4x$ เซนติเมตร

รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนรูปนี้มีพื้นที่ 96 ตารางเซนติเมตร

จากสูตร พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน $= \frac{1}{2} \times$ ผลคูณความยาวของเส้นทแยงมุม

จะได้

.....

.....

.....

เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนยาว $3 \times 4 = 12$ เซนติเมตร

และ $4 \times 4 = 16$ เซนติเมตร

ให้ด้านของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนยาว a เซนติเมตร

จะได้

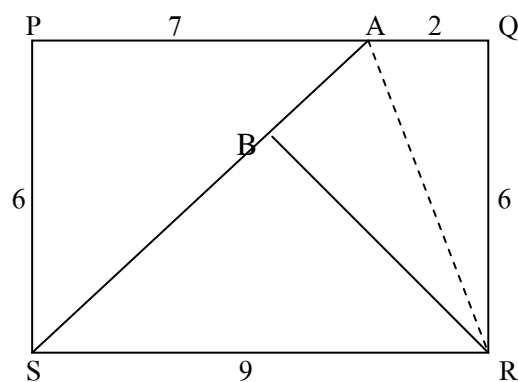
.....

.....

.....

ดังนั้น ความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเท่ากับ.....เซนติเมตร

12. PQRS เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จาก $PQ = 9$ เซนติเมตร และ $PS = 6$ เซนติเมตร A เป็นจุดบนด้าน PQ โดยที่ $PA = 7$ เซนติเมตร และ \overline{RB} ตั้งฉากกับ \overline{SA} ที่จุด B จงหาความยาวของ \overline{SA} และ \overline{RB}



รูปสามเหลี่ยม PAS;

.....

.....

.....

รูปสามเหลี่ยม AQR;
.....
.....

รูปสามเหลี่ยม BRS;(1)

รูปสามเหลี่ยม ABR;(2)

(1) = (2);

.....
.....
.....
.....
.....

.....(3)

.....(4)

(3) + (4);

.....
.....
.....

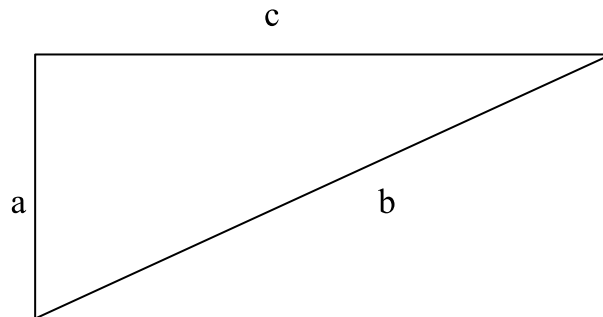
รูปสามเหลี่ยม BRS;

.....
.....
.....
.....

แบบทดสอบก่อนเรียน
เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. จากรูป ข้อใดต่อไปนี้อยู่ถูกต้อง



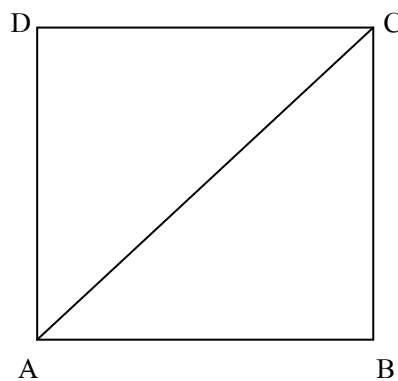
ก. $a^2 + b^2 = c^2$

ข. $a^2 + c^2 = b^2$

ค. $b^2 + c^2 = a^2$

ง. $a^2 + b^2 + c^2 = 0$

2. จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ข้อใดต่อไปนี้อยู่ถูกต้อง



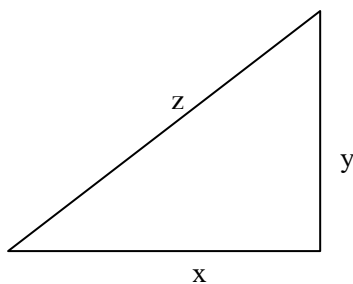
ก. $AC^2 = 2AD^2$

ข. $AC^2 = 4AB^2$

ค. $AC^2 = 2AB^2$

ง. $2AC^2 = AB^2 + BC^2$

3. จากรูป ข้อใดต่อไปนี้อยู่ไม่ถูกต้อง



ก. $x^2 = z^2 - y^2$

ข. $y^2 = z^2 - x^2$

ค. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

ง. $z^2 + x^2 - y^2 = 0$

4. ถ้าด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหนึ่งเท่ากับ 5, 6 และ $\sqrt{61}$ หน่วย ข้อใดต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสาม

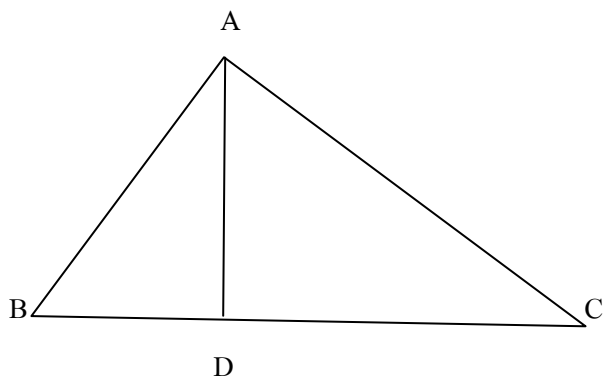
ก. $5^2 + 6^2 = 61^2$

ข. $5^2 + 6^2 = (\sqrt{61})^2$

ค. $(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{6})^2 = 61^2$

ง. $(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{61})^2$

5. รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี \overline{AD} ตั้งฉากกับ \overline{BC} ที่จุด D ข้อใดต่อไปนี้ **ไม่** ถูกต้อง



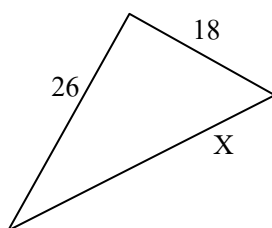
ก. $BC^2 = AB^2 + AC^2$

ข. $AD^2 = AB^2 - BD^2$

ค. $CD^2 = AC^2 - AD^2$

ง. $AB^2 = AC^2 - DC^2$

6. จากรูป ค่าของ x เท่ากับเท่าใด



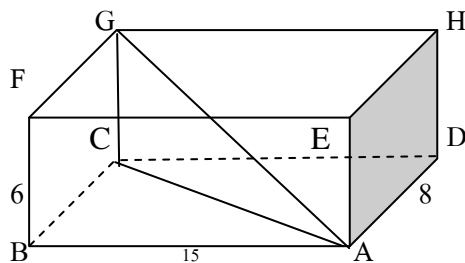
ก. $10\sqrt{10}$

ข. $10\sqrt{20}$

ค. $10\sqrt{44}$

ง. 100

ใช้รูปต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 7-9



7. \overline{AF} ยาวกี่เซนติเมตร

- ก. $\sqrt{261}$ เซนติเมตร ข. $\sqrt{289}$ เซนติเมตร
 ค. $\sqrt{341}$ เซนติเมตร ง. $\sqrt{359}$ เซนติเมตร

8. \overline{AC} ยาวกี่เซนติเมตร

- ก. $\sqrt{261}$ เซนติเมตร ข. 17 เซนติเมตร
 ค. 18 เซนติเมตร ง. $\sqrt{341}$ เซนติเมตร

9. \overline{AG} ยาวกี่เซนติเมตร

- ก. 18 เซนติเมตร ข. $5\sqrt{3}$ เซนติเมตร
 ค. $\sqrt{325}$ เซนติเมตร ง. 23 เซนติเมตร

10. บ้านไดอั้นหนึ่งยาว 7.5 เมตร วางพาดกับขอบบนของกำแพงซึ่งสูง 6 เมตร โคนบ้านไดอั้นนี้ห่างจากกำแพงกี่เมตร

- ก. 2.4 เมตร ข. 2.5 เมตร
 ค. 4.2 เมตร ง. 4.5 เมตร